

# Matematica III

Docente: Giulio Galise

CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni, A.A. 2021/2022

## Esercitazione 7

**Esercizio 1.** Siano  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  ed  $f : R \mapsto \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Usando la definizione stabilire se  $f$  è integrabile su  $R$  e, in caso positivo, calcolare

$$\iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

La frontiera  $\partial R$  di  $R$  è misurabile? Quanto vale  $\text{mis}(\partial R)$ ?

**Esercizio 2.** Calcolare

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

nei seguenti casi:

(1)  $f(x, y) = \frac{x}{1+y}$ ,  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$

(2)  $f(x, y) = ax^2 + by$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  costanti,  $D = \{(x, y) \in [-1, 1] \times \mathbb{R} : x^2 \leq y \leq 1\}$

**Esercizio 3.** Calcolare

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy$$

nei seguenti casi:

(1)  $f(x, y) = y \arcsin x$ ,  $D$  è il quarto di cerchio di centro l'origine e raggio unitario contenuto nel primo quadrante

(2)  $f(x, y) = \frac{y}{4x^2 + y^2}$ ,  $D$  è la porzione del piano limitata dalla parabola  $y = 1 - x^2$  e dall'asse delle  $x$

(3)  $f(x, y) = \ln(1 + x + 2y)$ ,  $D$  è l'insieme delimitato dalla parabola  $x = y^2$  e dalle rette  $y = 0$  e  $x = 1$

(4)  $f(x, y) = \cos(y^2)$ ,  $D$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$

(5)  $f(x, y) = \frac{\sin y}{y}$ ,  $D$  è il quadrilatero di vertici  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ ,  $(\pi, \pi)$ ,  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(2\pi, 2\pi)$

**Esercizio 4.** Esprimere i seguenti integrali doppi invertendo l'ordine di integrazione

$$(1) \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[4]{y}} f(x, y) dx$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$$

$$(3) \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{-x}^{x^2} f(x, y) dy$$

**Esercizio 5.** Determinare l'area del dominio limitato dall'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , dove  $a, b > 0$ .

**Esercizio 6.** Calcolare il volume del cilindroide

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \left[ \frac{2}{\pi}, \frac{4}{\pi} \right], y \in \left[ 0, \frac{1}{x} \right], 0 \leq z \leq \frac{\cos y}{x^2} \right\}$$

**Esercizio 7.** Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D |x - y| dx dy$$

essendo  $D$  il dominio limitato dalla retta di equazione  $y = 2x - 1$  e dalla parabola di equazione  $y = 2 - x^2$ .